

Vorlesung 5b

Unabhängigkeit

Teil 4

Unabhängigkeit von Ereignissen

(Buch S. 67-68)

Unabhängigkeit von Ereignissen

(Buch S. 67)

Ereignisse E_1, \dots, E_n heißen **unabhängig**
: $\iff I_{E_1}, \dots, I_{E_n}$ sind **unabhängig**.

Satz:

Für die Unabhängigkeit von E_1, \dots, E_n reicht aus, dass

$$\mathbf{P}(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}) = \mathbf{P}(E_{i_1}) \cdots \mathbf{P}(E_{i_k})$$

für alle $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.

Einen eleganten Beweis führt man über eine Rechnung mit Indikatorvariablen (ähnlich wie bei der Einschluss-Ausschlussformel), siehe Buch Seite 67.

Der Beweis des Satzes wird in der Vorlesung nicht geführt.

Korollar zum vorigen Satz:

Die **Unabhängigkeit** zweier Ereignisse E_1, E_2
ist **äquivalent** zur Produktformel

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1) \mathbf{P}(E_2)$$

Und die **Unabhängigkeit dreier Ereignisse** E_1, E_2, E_3 ist äquivalent dazu, dass **beide** der folgenden **Bedingungen a) und b)** erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2), \\ & \mathbf{P}(E_1 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_3), \\ & \mathbf{P}(E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3). \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3)$$

a) oder b) **allein reichen i.a. nicht für die Unabhängigkeit**, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel:

(Z_1, Z_2) sei ein zweifacher $\frac{1}{2}$ -Münzwurf,

$$E_1 := \{Z_1 = 1\}, \quad E_2 := \{Z_2 = 1\}, \quad E_3 := \{Z_1 = Z_2\}.$$

E_1, E_2, E_3 sind paarweise unabhängig (warum?),

aber nicht unabhängig:

das Ereignis $E_1 \cap E_2$ zieht das Ereignis E_3 nach sich! Also:

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) > \mathbf{P}(E_1 \cap E_2)\mathbf{P}(E_3);$$

die Ereignisse E_1, E_2, E_3 sind somit nicht unabhängig.

Also reicht Bedingung a) allein nicht
für die Unabhängigkeit der drei Ereignisse!

Auch Bedingung b) allein reicht nicht:

In den Übungen werden wir ein Beispiel von drei Ereignissen E_1, E_2, E_3 sehen, die nicht unabhängig sind, aber für die

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3)$$

gilt.